

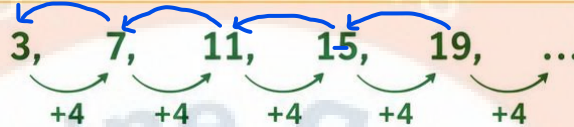
Arithmetic & Geometric Progressions

கூட்டுத் தொடர் & பெருக்குத் தொடர் வரிசை

ARITHMETIC PROGRESSION (A.P.)

An Arithmetic Progression (A.P.) is a sequence of numbers in which the difference between any two consecutive terms is constant.

EXAMPLE:



Common difference (d) = 4

7-3 ✓
3-7 ✗

a - 1st Term
↳ 3

FORMULAS OF A.P.

1 General term (n^{th} term)

$$a_n = a + (n - 1)d$$

where,
 $a_n = n^{\text{th}}$ term
 $a =$ first term
 $d =$ common difference
 $n =$ number of terms

2 n^{th} term

$$T_n = a + (n - 1)d$$

where,
 $T_n = n^{\text{th}}$ term

$a_n = a + (n-1)d$

3 Sum of first n terms

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$$

where,
 $S_n =$ sum of first n terms

4 Sum using first and last term

$$S_n = \frac{n}{2} (a + l)$$

where,
 $l =$ last term = a_n

5 Common difference

$$d = a_{n+1} - a_n$$

where,
 $a_{n+1} = (n+1)^{\text{th}}$ term
 $a_n = n^{\text{th}}$ term

6 Last term

$$l = a + (n - 1)d$$

where,
 $l =$ last term
 $n =$ number of terms

KEY POINTS

- The difference between consecutive terms is constant: $d = a_{n+1} - a_n$
- An A.P. can have finite or infinite number of terms.

Q1. Find the 12th term from the last term of the A.P. -2, -4, -6, ... -100.

-2, -4, -6, ... - 100 என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இறுதி உறுப்பிலிருந்து 12வது உறுப்பைக் காண்க.

(A) 78

(B) -73

(C) -78

(D) 87

(E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

$$-2, -4, -6 \dots -100$$

$$-100, -98, -96 \dots -6, -4, -2$$

$$a = -100$$

$$d = -98 - (-100)$$

$$= -98 + 100$$

$$d = 2$$

$$n = 12$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_{12} = -100 + (12-1) \times 2$$

$$= -100 + 22$$

$$= -78$$

$$\begin{array}{r} -100 \\ + 22 \\ \hline -78 \end{array}$$

Q2. Find the sum of 3, 7, 11, 40 terms.

3, 7, 11, ... என்ற தொடரில் 40 உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காண்க.

$$n=40 \quad a=3 \quad d=4$$

(A) 2340

(B) 3240

(C) 3640

(D) 3140

(E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$= \frac{40}{2} [2(3) + (40-1)4]$$

$$= 20 [6 + 39 \times 4]$$

$$= 20 [6 + 156]$$

$$= 20 [162]$$

$$= 3240$$

Q3. In an Arithmetic progression the sum of first n -terms is $(5n^2 + 3n) / 2$. Find the 10th term.

ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் n -உறுப்புகளின் கூடுதல் $(5n^2 + 3n) / 2$ எனில், 10ஆவது உறுப்பு.

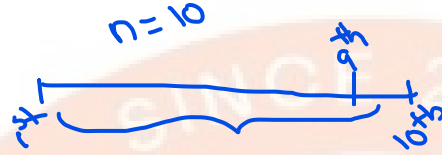
(A) 39

(B) 59

(C) 49

(D) 69

(E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை



$$S_n = \frac{5n^2 + 3n}{2}$$

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$S_{10} = \frac{5(10^2 + 3(10))}{2} = \frac{5(100 + 30)}{2} = \frac{5(130)}{2} = \frac{650}{2} = 325$$

$$S_9 = \frac{5(9^2 + 3(9))}{2} = \frac{5(81 + 27)}{2} = \frac{5(108)}{2} = \frac{540}{2} = 270$$

$$a_{10} = \begin{array}{r} 325 \\ - 270 \\ \hline 55 \end{array}$$

Q4. Find the 19th term of an Arithmetic progression (A.P) $-11, -15, -19, \dots$

$-11, -15, -19, \dots$ என்ற கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் 19ஆவது உறுப்பைக் காண்க.

(A) -83

(B) 61

(C) -116

(D) 80

(E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

$$a = -11$$

$$d = -15 + 11 = -4$$

$$n = 19$$

$$-11, -15, -19, \dots$$

$$a_{19} = -11 + (19-1)(-4)$$

$$= -11 + 18(-4)$$

$$= -11 - 72$$

$$= -83$$

Q5. If 18, a, b, -3 are in Arithmetic progress, then what is the value of (a + b)?

18, a, b, -3 இவை கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளது எனில் (a + b)-யின் மதிப்புக் காண்க.

(A) 7

(B) 11

(C) 15

(D) 21

(E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

$$a - 18 = -3 - b$$

$$a + b = 18 - 3$$

$$a + b = 15$$

Q6. Which term of the series 16, 11, 6, 1 is -54?

16, 11, 6, 1 என்ற தொடர் வரிசையில் -54 என்பது எத்தனையாவது உறுப்பு?

(A) 16

(B) 19

(C) 14

(D) 15

(E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

16, 11, 6, -1

-54

$$a = 16$$

$$a_n = -54$$

$$d = 11 - 16 = -5$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$-54 = 16 + (n-1)(-5)$$

$$-54 - 16 = (n-1)(-5)$$

$$\frac{-70}{-5} = n-1$$

$$14 + 1 = n$$

$$15 = n$$



GEOMETRIC PROGRESSION (GP)

A Geometric Progression (GP) is a sequence of numbers in which the **ratio** of any term to its preceding term is **constant**.

Example: \rightarrow GP

2, 6, 18, 54, 162, ...

Common ratio (r) =

$$\frac{6}{2} = 3, \quad \frac{18}{6} = 3, \quad \frac{54}{18} = 3, \dots$$

GENERAL FORM

A GP can be written as:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}, \dots$$

where,

a = first term ($a \neq 0$)

r = common ratio ($r \neq 0$)

n = term number (n is a positive integer)

n^{th} term (General term):

$$T_n = ar^{n-1}$$

IMPORTANT FORMULAS

1 n^{th} term of GP:

$$T_n = ar^{n-1}$$

2 Product of first n terms:

$$P_n = a^n r^{n(n-1)/2}$$

3 Sum of first n terms ($r \neq 1$):

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

4 Sum of first n terms ($r = 1$):

$$S_n = na$$

5 Sum to infinity ($|r| < 1$):

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

$r > 1 \rightarrow S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$
 $r < 1 \rightarrow S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$



Key Point: In a GP, each term is obtained by multiplying the previous term by a constant **non-zero** number (r).

$\frac{6}{2} = 3$
 $\frac{18}{6} = 3$
 $\frac{54}{18} = 3$

AP,
 $a, a+d, a+2d, \dots$

Q7. Find the first term of a G.P. in which $S_6 = 4095$ and $r = 4$.

ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் $S_6 = 4095$ மற்றும் $r = 4$ எனில் முதல் உறுப்பைக் காண்க.

- (A) 2
 (B) 3
 (C) 4
 (D) 5
 (E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

$r > 1$

$$S_n = a \frac{(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_6 = a \frac{(r^6 - 1)}{r - 1}$$

$$4095 = a \frac{[4^6 - 1]}{4 - 1}$$

$$4095 \times 3 = a [4096 - 1]$$

$$\frac{4095 \times 3}{4095} = a$$

$$3 = a$$

$$4 \times 4 = 16 \times 4 = 64$$

$$\begin{array}{r} 64 \times 64 \\ 256 \\ 384 \\ \hline 4096 \end{array}$$

Q8. Find the sum of infinity of $21 + 14 + 28/3 + \dots$

$21 + 14 + 28/3 + \dots$ என்ற முடிவுறாத் தொடரின் கூடுதல் காண்க.

(A) 63/5

(B) 7

(C) 63

(D) 63/2

(E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

$$r = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{21}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{21}{\frac{1}{3}}$$

$$= 21 \times 3$$

$$= 63$$

Q9. Find the 8th term of Geometric Progression (G.P) 9, 3, 1,

9, 3, 1, என்ற பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் 8வது உறுப்பைக் காண்க.

(A) 1/27

(B) 1/81

(C) 1/243

(D) 1/729

(E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

$$n=8 \quad a=9 \quad r=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$a_n = a r^{n-1}$$

$$= 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7$$

$$= 3^2 \times 3^{-7}$$

$$= 3^{2-7}$$

$$= 3^{-5}$$

$$= \frac{1}{3^5}$$

$$= \frac{1}{243}$$

$$3 \times 3 = 9 \times 3 = 27 \times 3 = 81$$

$$81 \times 3 = 243$$

Q10. Find x so that $x + 6$, $x + 12$ and $x + 15$ are consecutive terms of a Geometric progression.

$x + 6$, $x + 12$ மற்றும் $x + 15$ என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகள் எனில் x -ன் மதிப்பைக் காண்க.

(A) -78

(B) -18

(C) -12

(D) -6

(E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

$$\frac{x+12}{x+6} = \frac{x+15}{x+12}$$

$$(x+12)^2 = (x+15)(x+6)$$

$$x^2 + 24x + 144 = x^2 + 6x + 15x + 90$$

$$24x + 144 = 21x + 90$$

$$24x - 21x = -144 + 90$$

$$3x = -\frac{19}{3}$$

$$x = -18$$

Q11. Find the common ratio for the geometric sequence 0.15, 0.015, 0.0015,...

0.15, 0.015, 0.0015,... என்ற பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் பொதுவிகிதம் காண்க.

- (A) 0.1 0.15, 0.015, 0.0015 $\frac{0.015}{0.15}$
- (B) 0.01
- (C) 0.001 $\frac{15}{100}, \frac{15}{1000}, \frac{15}{10000}$
- (D) 1
- (E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

$$r = \frac{\frac{15}{1000}}{\frac{15}{100}}$$

$$= \frac{15}{1000} \times \frac{100}{15}$$

$$= \frac{1}{10} = 0.1$$

Q12. How many terms of the series $1 + 4 + 16 + \dots$ make the sum 1365?

$1 + 4 + 16 + \dots$ என்ற தொடரின் எத்தனை உறுப்புகளை கூட்டினால் கூடுதல் 1365 கிடைக்கும்?

- (A) 5
 (B) 6
 (C) 4
 (D) 3
 (E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

$$S_n = 1365$$

$$a = 1$$

$$r = 4$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$1365 = \frac{1(4^n - 1)}{4 - 1}$$

$$1365 \times 3 = 4^n - 1$$

$$4095 + 1 = 4^n$$

$$4096 = 4^n$$

$$4^6 = 4^n$$

$$\boxed{6 = n}$$

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 4096} \\ \underline{4} \\ 0 \\ 4 \\ \underline{4} \\ 0 \\ 4 \\ \underline{4} \\ 0 \\ 4 \\ \underline{4} \\ 0 \\ 4 \\ \underline{4} \\ 0 \end{array}$$



Special Case:

$$1) 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2) 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

$$3) 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$4) 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$5) 2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$6) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

$$7) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$8) 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$$

$$9) 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

Q13. Find the sum of the series $11 + 12 + 13 + \dots + 31$.

கூட்டுப்பலன் காண்க: $11 + 12 + 13 + \dots + 31$.

- (A) 441
 (B) 496
 (C) 55
 (D) 465
 (E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

M-1 $S_{31} - S_{10}$

$$\frac{31(31+1)}{2} - \frac{10(10+1)}{2}$$

$$\frac{31 \times 32}{2} - \frac{10 \times 11}{2}$$

$$496 - 55$$

$$441$$

M-2 $n = 31 - 10 = 21$

$a = 11$
 $d = 1$
 $l = 31$

$$S_n = \frac{n}{2} [a+l]$$

$$= \frac{21}{2} [11+31]$$

$$= \frac{21}{2} \times 42$$

$$= 441$$

Q14. If $1 + 2 + 3 + \dots + n = 666$ then find n .

$1 + 2 + 3 + \dots + n = 666$ எனில், n -ன் மதிப்பு?

- (A) -37
 (B) 36
 (C) 37
 (D) 38
 (E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

Handwritten solution for the sum of an arithmetic series:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 666$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 666$$

$$n(n+1) = 1332$$

↓ ↓

$$36 \times 37 = 1332$$

Verification of the sum:

$$30 \times 20 = 400$$

$$70 \times 70 = 4900$$

$$30^2 = 900$$

$$35^2 = 1225$$

$$40^2 = 1600$$

Handwritten multiplication:

$$\begin{array}{r} 35 \times 36 \\ \hline 210 \\ 1080 \\ \hline 1260 \end{array}$$

Q15. If $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = 44100$, then find $1 + 2 + 3 + \dots + k$.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = 44100$ எனில் $1 + 2 + 3 + \dots + k$ - ன் மதிப்பு காண்க.

- (A) 210
- (B) 201
- (C) 200
- (D) 221

(E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = 44100$$

$$\left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 = 44100$$

$$\frac{k(k+1)}{2} = \sqrt{44100}$$

$$= 210$$

$$\left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2$$

$$\frac{k(k+1)}{2}$$

Q16. Find the sum of $1 + 3 + 5 + \dots + 55 = n^2$

தொடரின் கூடுதல் காண்க: $1 + 3 + 5 + \dots + 55$.

(A) 700

(B) 784

(C) 555

(D) 550

(E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

$$2n - 1 = 55$$

$$2n = 56$$

$$n = 28$$

$$n^2$$

$$= 28^2$$

$$= 784$$



Q17. If $1 + 2 + 3 + \dots + k = 325$ then find the value of $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3$.

$1 + 2 + 3 + \dots + k = 325$ எனில் $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3$ இன் மதிப்பு காண்க?

(A) 103425

(B) 105605

(C) 105625

(D) 106625

(E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

$$\frac{k(k+1)}{2}$$

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

$$= 325^2$$

$$= 105625$$

$$\frac{325 \times (300 + 20 + 5)}{2}$$

$$\begin{array}{r} 97500 \\ 6500 \\ 1625 \\ \hline 105625 \end{array}$$

Q18. The sum of first n natural numbers is 253, then find the value of n .

முதல் n இயல் எண்களின் கூடுதல் 253 எனில், n -இன் மதிப்பு காண்க.

(A) 22

(B) 18

(C) 24

(D) 16

(E) Answer not known / விடை தெரியவில்லை

$$1+2+3 + \dots + n = 253$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 253$$

$$n(n+1) = 506$$

$$22 \times 23 = 506$$

$$\begin{array}{l} \times 20 \times 21 \\ \times 21 \times 22 \\ \times 22 \times 23 \\ \times 23 \times 24 \\ \times 24 \times 25 \end{array}$$

$$20^2 = 400$$

$$25^2 = 625$$

$$30^2 = 900$$

$$\begin{array}{r} 22 \times 23 \\ 66 \\ \times 44 \\ \hline 506 \end{array}$$